

Kombinatorika

Zabývá se množinami s nějakou vnitřní strukturou. Součástí kombinatoriky se dnes považuje i teorie grafů.

Klasická úloha: Kolika způsoby můžeme poskládat 32 karet do řady za sebou?

Permutace, variace, kombinace

Permutace n prvků je skupina všech n prvků, které jsou uspořádány v jakémkoliv možném pořadí, tzn. výběr prvků závisí na pořadí. Rozlišujeme permutace *bez opakování* a *s opakováním*.

Permutace bez opakování

Pokud se prvky ve výběru nemohou opakovat, pak počet všech možných výběrů je určen vztahem

$$P(n) = n!, \text{ kde } n! \text{ označuje faktoriál.}$$

Příklad

Mějme skupinu tří různých prvků a, b, c .

Permutace těchto prvků představují skupiny $abc, acb, bac, bca, cab, cba$. Jejich počet je tedy

$$P(3) = 3! = 6 \quad (3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6)$$

Permutace s opakováním

Pokud se prvky ve výběru mohou opakovat, pak počet permutací s opakováním je určen jako

$$P_{n_1, n_2, \dots, n_k}(n) = \frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdot \dots \cdot n_k!},$$

přičemž mezi vybranými prvky je k skupin, které mají postupně $n_1, n_2, \dots, n_k$ stejných prvků. Musí přitom platit:

$$n = \sum_{i=1}^k n_i$$

Příklad

Mějme skupinu tří prvků a, a, b . Skupina je tedy složena ze dvou skupin (tedy $k=2$), přičemž první skupina má dva prvky a , tzn. $n_1=2$, a druhá skupina obsahuje jeden prvek b , tzn. $n_2=1$.

Permutacemi s opakováním získáme skupiny aab, aba, baa . Počet těchto skupin je tedy roven

$$P_{2,1}(3) = \frac{3!}{2! \cdot 1!} = 3$$

Variace je v kombinatorice vybraná podmnožina prvků z konečné množiny, přičemž záleží na pořadí těchto prvků. Podle toho, jestli lze vybírat i prvky, které byly již jednou do výběru vybrány, rozlišuje se **variace s opakováním** a

variace bez opakování. Pro praxi je velmi důležité zjišťování počtu různých variací. Ten závisí na počtu prvků původní množiny, počtu prvků výběru a druhu variace.

Variace bez opakování

Počet variací k -té třídy z n prvků bez opakování, tzn. žádný prvek výběru se nemůže opakovat, je

$$V_k(n) = \frac{n!}{(n-k)!}$$

Příklad

Mějme skupinu tří prvků a, b, c , tzn. $n = 3$. Chceme-li z těchto prvků vybrat jeden, tzn. $k = 1$, počet výběrů je roven

$$V_1(3) = \frac{3!}{(3-1)!} = \frac{3 * 2 * 1}{2 * 1} = 3$$

Chceme-li z uvedené trojice prvků vybrat vždy dva, přičemž nám záleží na pořadí a žádný prvek nemůžeme vybrat vícekrát, můžeme získat následující dvojice prvků: ab, ac, ba, bc, ca, cb . Jedná se o variaci druhé třídy (tedy $k = 2$) bez opakování. Pro počet dvojic pak dostáváme

$$V_2(3) = \frac{3!}{1!} = \frac{3 * 2 * 1}{1} = 6$$

Jestliže chceme z uvedené trojice prvků vybrat trojice, přičemž nám záleží na pořadí a žádný prvek nemůžeme vybrat vícekrát, můžeme získat následující trojice prvků: $abc, acb, bac, bca, cab, cba$. Jedná se o variaci třetí třídy (tedy $k = 3$) bez opakování. Pro počet trojic tedy platí

$$V_3(3) = \frac{3!}{0!} = \frac{3 * 2 * 1}{1} = 6$$

Variace s opakováním

Počet variací k -té třídy z n prvků s opakováním, tzn. každý prvek se ve výběru může objevit vícekrát, je určen vztahem

$$V'_k(n) = n^k$$

Příklad

Mějme skupinu o dvou prvcích a, b , tzn. $n = 2$.

Chceme-li z těchto prvků vybrat vždy jen jeden prvek, můžeme to udělat pouze dvěma možnými způsoby, tzn. vybereme a nebo b . Jedná se o variaci první třídy, tzn. $k = 1$, a tedy počet výběrů je roven

$$V'_1(2) = 2^1 = 2$$

Je vidět, že u variací první třídy není třeba rozlišovat, zda jsou s opakováním nebo bez opakování.

Chceme-li z uvedené dvojice prvků vybrat vždy dva, přičemž nám záleží na pořadí a každý prvek můžeme vybrat vícekrát, můžeme získat následující dvojice prvků: aa, ab, ba, bb . Jedná se o variaci druhé třídy (tedy $k = 2$) s opakováním. Pro počet dvojic pak dostáváme

$$V_2'(2) = 2^2 = 4$$

Pokud chceme z uvedené dvojice prvků vybrat vždy trojici, přičemž nám záleží na pořadí a každý prvek můžeme vybrat vícekrát, můžeme získat následující trojice prvků: $aaa, aab, aba, abb, baa, bab, bba, bbb$. Jedná se o variaci třetí třídy (tedy $k = 3$) s opakováním. Pro počet trojic pak dostáváme

$$V_3'(2) = 2^3 = 8$$

Obdobně bychom dostali $V_4'(2) = 2^4 = 16$, atd.

Kombinace k -té třídy z n prvků je skupina k prvků vybraných z celkového počtu n prvků, přičemž při výběru nezáleží na pořadí jednotlivých prvků. Rozlišujeme kombinace *s opakováním* a *bez opakování*.

Kombinace bez opakování

Počet kombinací k -té třídy z n prvků bez opakování, tzn. žádný prvek výběru se nemůže opakovat, je

$$C_k(n) = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}, \quad \text{kde } \binom{n}{k} \text{ představuje } \mathbf{kombinační\ číslo}.$$

Příklad

Mějme skupinu tří prvků a, b, c , tzn. $n = 3$.

Chceme-li z těchto prvků vybrat vždy jen jeden prvek, můžeme to udělat třemi možnými způsoby, tzn. vybereme a nebo b nebo c . Jedná se o kombinaci první třídy, tzn. $k = 1$, a tedy počet výběrů je roven

$$C_1(3) = \binom{3}{1} = 3$$

Chceme-li z uvedené trojice prvků vybrat vždy dva, přičemž nám nezáleží na pořadí a žádný prvek nemůžeme vybrat vícekrát, můžeme získat následující dvojice prvků: ab, ac, bc . Jedná se o kombinaci druhé třídy (tedy $k = 2$) bez opakování. Pro počet dvojic pak dostáváme

$$C_2(3) = \binom{3}{2} = 3$$

Pokud chceme z uvedené trojice prvků vybrat vždy tři, přičemž nám nezáleží na pořadí a žádný prvek nemůžeme vybrat vícekrát, můžeme získat pouze jedinou trojici prvků: abc . Jedná se o kombinaci třetí třídy (tedy $k = 3$) bez opakování. Pro počet trojic tedy platí

$$C_3(3) = \binom{3}{3} = 1$$

Kombinace s opakováním

Počet kombinací k -té třídy z n prvků s opakováním, tzn. každý prvek se ve výběru může objevit vícekrát, je určen vztahem

$$C'_k(n) = \binom{n+k-1}{n-1} = \binom{n+k-1}{k}$$

Příklad

Mějme skupinu dvou prvků a, b , tzn. $n = 2$.

Chceme-li z těchto prvků vybrat vždy jen jeden prvek, můžeme to udělat dvěma možnými způsoby, tzn. vybereme a nebo b . Jedná se o kombinaci první třídy, tzn. $k = 1$, a tedy počet výběrů je roven

$$C'_1(2) = \binom{2+1-1}{1} = \binom{2}{1} = 2$$

Je vidět, že u kombinací první třídy není třeba rozlišovat, zda jsou s opakováním nebo bez opakování.

Chceme-li z uvedené dvojice prvků vybrat vždy dva, přičemž nám nezáleží na pořadí a každý prvek můžeme vybrat vícekrát, můžeme získat následující dvojice prvků: aa, ab, bb . Jedná se o kombinaci druhé třídy (tedy $k = 2$) s opakování. Pro počet dvojic pak dostáváme

$$C'_2(2) = \binom{2+2-1}{2} = \binom{3}{2} = 3 \qquad C'_3(2) = \binom{2+3-1}{3} = \binom{4}{3} = 4$$